

# El pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas: una mirada desde los libros de texto<sup>1</sup>

The variational thought studying trigonometric relationships: a view from textbooks

O pensamento variacional estudar relações trigonométricas: uma visão a partir de livros didáticos

Recibido: mayo de 2013  
Aceptado: agosto de 2013

Ferney Tavera Acevedo<sup>2</sup>  
Jhony Alexander Villa-Ochoa<sup>3</sup>

## Resumen

Con base en un análisis de los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y algunos estudios e investigaciones sobre la variación asociada al estudio de la trigonometría plana, decidimos aplicar la técnica del análisis de contenido a algunos libros de texto del grado décimo frente al tipo de ejercicios y “problemas” que se proponen para abordar el estudio de las relaciones trigonométricas; este análisis muestra que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo. Estos resultados muestran la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones “dinámicas” y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.

**Palabras clave:** Pensamiento variacional; Enseñanza; metodología de enseñanza; análisis y reflexión sobre la enseñanza; metodología de enseñanza; libros de texto; matemáticas escolares; geometría; trigonometría; relaciones trigonométricas; tecnología.

## Abstract

Based on an analysis of the Curriculum Guidelines, Basic Standards Competition and some studies and research on the variation associated with the study of plane trigonometry, we decided to apply the technique of content analysis to some textbooks tenth grade compared to type exercises and “problems” that are proposed for the study of trigonometric relations, this analysis shows that generally develops this theme through algebraic expressions to calculate fixed and unknown data of a triangle. These results show the need to develop alternative proposals which emphasize relationships display “dynamic” and functional relationships between the angles and sides of a triangle.

1 Artículo de Investigación

2 Universidad Industrial de Santander, Colombia. Licenciado en Matemáticas UIS, Especialista en Educación Matemática UIS, Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales Universidad Nacional de Colombia, integrante del grupo de Investigación en Educación Matemática de la EDUMAT- UIS. Contacto: williamduardoc@hotmail.com

3 Universidad Industrial de Santander, Colombia. Integrante del grupo de Investigación en Educación Matemática EDUMAT- UIS. Contacto: soniapenuela@hotmail.com

**Keywords:** variational Thinking, Teaching, teaching methodology, analysis and reflection on teaching, teaching methods, textbooks, school mathematics, geometry, trigonometry, trigonometric relationships; technology..

## Resumo

Com base na análise das Diretrizes Curriculares, padrões de concorrência básico e alguns estudos e pesquisas sobre a variação associada ao estudo de trigonometria plana, decidimos aplicar a técnica de análise de conteúdo de alguns livros de décimo grau em relação ao tipo exercícios e “problemas” que são propostos para o estudo das relações trigonométricas, esta análise mostra que geralmente se desenvolve este tema através de expressões algébricas para calcular dados fixos e desconhecidos de um triângulo. Estes resultados mostram a necessidade de desenvolver propostas alternativas que enfatizam as relações exibir relacionamentos “dinâmicas” e funcional entre os ângulos e lados de um triângulo.

**Palavras-chave:** Pensamento variacional, ensino, metodologia de ensino, análise e reflexão sobre o ensino, métodos de ensino, os livros didáticos, a matemática da escola, geometria, trigonometria, relações trigonométricas; tecnologia.

## Presentación del problema

Desde nuestra experiencia como docentes activos del sistema educativo colombiano hemos observado que uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planificar sus intervenciones en el aula de clase son los libros de texto, dado que orientan y encauzan muchas de las actividades que son desarrolladas por los estudiantes. A raíz de esto, consideramos que la mayoría de los docentes no solamente utilizan los libros de texto como guía para explicar los conceptos matemáticos, sino también como fuente bibliográfica para sacar ejercicios y problemas que son expuestos más adelante en evaluaciones, con el propósito que los estudiantes demuestren lo aprendido hasta el momento.

De acuerdo con esta indicación y los diferentes argumentos encontrados en la revisión inicial de literatura, se genera un especial interés por examinar algunos libros de texto que hagan referencia al estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, porque se pretende analizar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas de la literatura, lo emanado por el MEN desde los Lineamientos Curriculares (Colombia,

1998) y los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006), y lo que habitualmente se presenta en el aula de clase a través de los libros de texto del grado décimo.

Este estudio previo, necesariamente nos condujo a plantear una serie de interrogantes en torno a la estructura interna que tienen los libros de texto del grado décimo, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones trigonométricas. Para ello, hemos formulado la siguiente pregunta: ¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de los libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?

## Referente conceptual

Una de las temáticas más importantes para abordar en la enseñanza de las matemáticas, desde el punto de vista de la Educación Básica y la Educación Media en Colombia, es el desarrollo del pensamiento variacional. Para ello, el MEN presenta algunos elementos que posibilitan su identificación a través del estudio de la variación, pues considera que el pensamiento variacional está en relación con el “reconocimiento, la percepción, la identificación

y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos” (Colombia, 2006, p. 66).

Tanto desde los documentos emanados por el MEN (Colombia, 1998, 2006) como desde los planeamientos de Vasco (2006) observamos un interés en el reconocimiento de la variación en otros contextos (e. g: desde lo numérico, lo geométrico, lo métrico,...), aplicado a otras ciencias y a la cotidianidad de los estudiantes, puesto que se incorpora el movimiento en forma de variable, de tal manera, que se analicen y se interpreten las relaciones producidas por éstas en una situación determinada.

Desde esta perspectiva, se hizo necesaria una revisión bibliográfica de algunos textos escolares, donde observamos que en varias ocasiones los libros de textos del grado décimo “desaprovechan” algunas oportunidades para abordar de manera dinámica el estudio de las relaciones trigonométricas, trayendo como consecuencia que esta temática de la trigonometría plana sea asumida como un proceso memorístico, rutinario y mecánico, que se desarrolla a través de fórmulas para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

La idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida mediante estudios e investigaciones que se han realizado en las últimas décadas, donde se resalta las implicaciones que tienen los libros de texto en las prácticas educativas generadas por el docente en el aula de clase. Al respecto Randahl (2012) expresa el papel que cumplen los libros de texto en el aula de clase, pues los asume como: objeto de estudio, material de consulta, registro de las actividades desarrolladas por los estudiantes, recopilación de ejercicios y problemas que se resuelven para mostrar lo aprendido.

Por otra parte, consideramos que las actividades planteadas en los libros de texto generalmente pertenecen a un contexto, razón que se justifica desde la literatura, dado que Font (2007) retoma el trabajo de Martínez para distinguir los siguientes tipos de contexto:

a. Contexto real: se refiere a la práctica real de las matemáticas, según el entorno sociocultural.

b. Contexto simulado: es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características.

c. Contexto evocado: se refiere a los problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula de clase, y permite imaginar una situación donde se da este hecho.

Esta idea necesariamente conduce a Font (2007) a establecer una diferencia particular entre los tipos de problemas contextualizados y los problemas escolares no-contextualizados (es decir, de contexto matemático), porque según este autor, los problemas que más han interesado en didáctica de las matemáticas han sido los problemas de contexto evocado; y debido a la complejidad de los procesos que se emplean para su resolución, determina un nuevo criterio para establecer otra clasificación, la cual está compuesta básicamente por dos tipos de problemas: aquellos problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos de modelización, mientras que el otro, son los problemas relativamente sencillos cuyo propósito es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados.

## Metodología

En esta investigación se analizó un conjunto de libros de textos de primer semestre de Universidad en los cursos de trigonometría, y otros, usados para apoyar la formación de los estudiantes del nivel de Educación Media. En este documento se fundamenta en los análisis hechos a los siguientes libros de texto de grado décimo:

Tabla 1

Autor (es)	Año	Nombres del libro de texto	Editorial
Buitrago, I., Romero, F. Ortiz, E., Gualdon, J. Morales, D., Cortáez, J.	2013	<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	Sanitiana
Galeano, E., Celis, J.	2009	<i>Fórmula 10</i>	Voluntad S.A.
Bastista, M., Ramírez, C., Chaves, A., Romero, J., Torres, W.	2007	<i>Trigonometría, geometría analítica y estadística</i>	Sanitiana
Morales, V.	2006	<i>Conceptos Matemáticas 10</i>	Norma

Fuente: Elaboración propia

Este análisis arrojó que generalmente los libros de texto analizados para el grado décimo, inician con una serie de lecturas para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, después introducen cada temática con una presentación general de la misma, para luego mostrar las definiciones y propiedades (algunas demostradas) con algunos ejemplos, posteriormente se destina un espacio para resolver ejercicios y problemas de aplicación, donde se encuentran los problemas contextualizados (Font, 2007) y, finalmente, hacen un comentario informativo de como utilizar la tecnología para algunos conceptos matemáticos, no necesariamente relacionados con el tema que se está trabajando en esos momentos.

De acuerdo a lo expresado en el apartado anterior, la variación está en relación con los contextos y estos a su vez, se plasman en problemas, situaciones y ejercicios que generalmente se presentan en los libros de texto. De ahora en adelante, se denominan bajo la categoría de tareas, a todas aquellas formas en que los libros de texto proponen actividades para que los estudiantes profundicen en sus conocimientos, en concordancia con el estudio de las relaciones trigonométricas.

## Análisis de los datos

Para realizar el análisis y la interpretación de los datos, se realizaron todas las tareas propuestas sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que se registraron mediante tablas los

resultados allí encontrados, teniendo en cuenta la frecuencia de las categorías y subcategorías halladas en la solución de las tareas planteadas.

En la siguiente tabla se observa la frecuencia de tareas que usan los libros de textos analizados, de acuerdo a si son tareas que hacen referencia a un contexto matemático, o a un contexto evocado, o a un contexto simulado, o a problemas reales (Font, 2007).

La información presentada en la tabla anterior, permite deducir que los libros de texto del grado décimo privilegian las tareas que hacen alusión a un contexto matemático y alguna veces a un contexto evocado, puesto que están asociadas, a un conjunto de enunciados de tipo verbal, los cuales utilizan cierto tipo de realismo hipotético en el que queda “transparente” cualquier situación que haga referencia a que se produzca en la “realidad”, es decir, situaciones de modelación matemática según lo propone Villa-Ochoa y Jaramillo (2011).

Al analizar las tareas propuestas en los libros de texto observamos que en ellas se reconocen las relaciones que existen entre las cantidades (variables o no), para ello, determinan dos tipos de tareas. La primera de ellas, son tareas en las cuales las razones trigonométricas se presentan para calcular “cantidades fijas” desconocidas (incógnitas) a partir de datos presentados en el enunciado; la segunda, son aquellas, en las cuales se hace un uso de las razones para describir alguna relación de tipo variacional entre cantidades. A continuación presentamos la descripción de una de las categorías encontradas con su respectivo ejemplo.

Tareas con una interpretación “seudo - dinámica” de las razones trigonométricas, utilizando el contexto evocado: esta tipología de tareas se cimienta en la presentación explícita o implícita de unas cantidades que se caracterizan por ser “variables”, puesto que describen en sus enunciados situaciones “aparentemente dinámicas” o “variacionales”. A continuación presentamos uno de los enunciados extraído de uno de los textos analizados que ejemplifican esta tipología de tareas:

*Un espectador observa aun motociclista desde un punto de un puente, ubicado a de altura con respecto a una carretera recta. Si en un*

Tabla 2

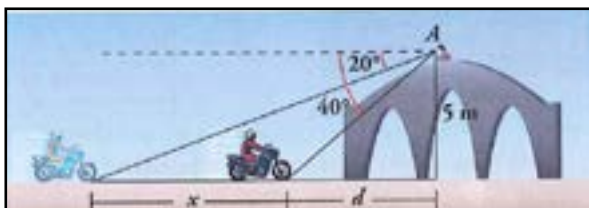
Tipo de problema	Contexto			
	matemático	evocado	simulado	reales
Problemas del texto				
En contextos del saber Matemático (4)	72	33	8	8
Fórmula (2)	30	89	8	8
En geometría, geometría analítica y estadística	42	18	8	8
Contextos Matemático (2)	48	42	8	8

Fuente: Elaboración propia

instante el ángulo de depresión varía de  $20^\circ$  a  $40^\circ$ .  
¿Qué distancia recorre el motociclista en este periodo de tiempo?

La representación gráfica de esta tarea es:

Tabla 2



Fuente: Elaboración propia

En este ejemplo se observa supuestamente un movimiento, es decir, una variación del ángulo que va desde  $20^\circ$  a  $40^\circ$  cuando el motociclista recorre distancia, sin embargo, cuando se resuelve la tarea dicho movimiento se ignora, para reducirse a la presencia de unas cantidades fijas conocidas, que son constantes (e. g.: ángulos de depresión) y otras desconocidas (e. g.: la expresión que representa la distancia parcial que recorre el motociclista y la expresión que representa la distancia que le hace falta al motociclista para llegar al punto donde está parado el espectador perpendicularmente).

De acuerdo con esto, en esta tipología de tareas se reitera una vez más, debido al análisis de la otra categoría, el hallazgo de un valor numérico en particular -distancia que recorre el motociclista-, a pesar de que en este enunciado se utilizan algunas palabras que dan cuenta de los fenómenos de cambio y variación en una situación.

## Conclusión

La mayoría de los ejercicios y problemas están diseñados para que el estudiante, calcule el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados. Así mismo, se desaprovechan los contextos de las situaciones planteados para hacer un estudio de las relaciones dinámicas (variacionales) entre las cantidades que en ellas intervienen; en otras palabras, las medidas a determinar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se pueden establecer ciertas relaciones funcionales.

## Referencias

- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of “contextualised” tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.
- Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.
- Colombia. MEN. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de Matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 422.
- Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 881 - 896.
- Vasco Uribe, C. E. (2006). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. En C. Vasco, Didáctica de las matemáticas: artículos selectos (págs. 134 - 148). Bogotá - Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa-Ochoa, J. A., & Jaramillo López, C. M. (2011). *Sense of Reality Through Mathematical Modelling Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri & G. Stillman (Eds.), (Vol. 1, pp. 701-711): Springer Netherlands.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(3), 514 - 528.